УДК 62-278

РАСЧЕТ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОФРИРОВАННОЙ В ОКРУЖНОМ И РАДИАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИЯХ МЕМБРАНЫ

В.Ф. УВАКИН, В.Б. ОЛЬКОВА

Институт техники, технологии и управления

Балаково

Полученные ранее нелинейные дифференциальные уравнения плоской анизотропной мембраны в области больших перемещений решены с использованием метода «наложения», найдено аналитическое выражение для упругой характеристики гофрированной в окружном и радиальном направлениях мембраны, дан анализ свойств мембран нового типа, определены выражения для коэффициентов анизотропии k_{1i} и $k_{j\text{р}}$ для синусоидального профиля волн гофр.

Система нелинейных дифференциальных уравнений в безразмерных параметрах плоской анизотропной мембраны в больших перемещениях имеет вид:

$$\begin{gathered} \rho\psi''+\psi'-\beta^2\cdot\frac{\psi}{\rho}=\frac{k_{1r}}{k_{tp}}\cdot\frac{\vartheta^2}{2}; \\ \rho\vartheta''+\vartheta'-\beta^2\cdot\frac{\vartheta}{\rho}=\frac{R^2}{D_{np}}\left(-\psi Eh\vartheta+\frac{pR}{2}\rho^2\right); \end{gathered} \tag{1}$$

где $\psi=-\frac{T_r r}{EhR}$ - функция радиального усилия; $\rho=\frac{r}{R}$ - безразмерный радиус мембраны; $\beta^2=\frac{k_{rp}k_{1r}}{k_{tp}k_{1t}}$ - безразмерный параметр; ϑ - угол поворота нормали к срединной поверхности мембраны; $D_{np}=D\cdot\frac{\left(1-\mu^2\right)}{\left(1-\mu^2\,\frac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\cdot\frac{k_{tp}}{k_{1r}}$ - приведенное значение изгибной жесткости гофрированной по двум направлениям мембраны; T_r - растягивающая сила в радиальном направлении, отнесенная к единице длины дуги; p – давление на мембрану; E – модуль упругости материала мембраны; μ - коэффициент Пуассона; h – толщина мембраны; R, r – наружный и текущий радиусы мембраны; k_{1r}, $k_{r\text{р}}$ и k_{1t}, $k_{t\text{р}}$ – коэффициенты анизотропии в радиальном и окружном направлениях плоской анизотропной мембраны, зависящие только от геометрии профиля волн гофр и толщины мембраны (символ ()' означает производную $\frac{d()}{d\rho}$).

Нелинейные уравнения (1) можно решить с использованием метода «наложения».

Основная идея метода наложения заключается в том, что сопротивление мембраны внешней нагрузке рассматривается как сумма сопротивлений изгибу и растяжению.

Сопротивление мембраны изгибу определяется по линейной теории, а сопротивление растяжению – из расчета абсолютно гибкой мембраны. Искомое решение определяется «наложением» этих двух решений, т.е. приравниванием суммы сопротивлений мембраны на изгиб и на растяжение внешней нагрузке:

$$\bar{p} = \bar{p}_u + \bar{p}_p,$$

где $\bar{p} = \frac{pR^4}{Eh^4}$ - безразмерный параметр давления; $\bar{p}_u$ характеризует сопротивление мембраны изгибу, а $\bar{p}_p$ - сопротивление растяжению.

Предположим, что упругая характеристика гофрированной мембраны описывается кубическим уравнением

$$\bar{p} = a\frac{\varpi_0}{h} + b\frac{\varpi_0^3}{h^3}, \tag{2}$$

где линейный член соответствует сопротивлению эквивалентной анизотропной мембраны изгибу и определяется из решения задачи о малых прогибах мембраны, кубический член характеризует сопротивление мембраны растяжению, для его определения необходимо рассмотреть задачу об абсолютно гибкой анизотропной мембране; ϖ_0 – прогиб центра мембраны под действием давления p.

Уравнения мембраны при малых прогибах и абсолютно гибкой мембраны можно получить как предельные случаи из дифференциальных уравнений (1) плоской анизотропной мембраны в больших перемещениях.

Проведем решение для мембраны, защемленной по наружному контуру, без жесткого центра, с постоянными глубинами волн гофр в окружном и радиальном направлениях.

Полагая при малых прогибах функцию растягивающего усилия ψ=0, получим из системы (1) линейное уравнение плоской анизотропной мембраны

$$\rho\vartheta'' + \vartheta' - \beta^2 \frac{\vartheta}{\rho} = \lambda_p \rho^2,$$

где $\lambda_p = \dfrac{pR^3}{D_{пр}}$ - параметр нагрузки.

Решение этого линейного уравнения запишем в виде

$$\vartheta = \lambda_p \left(C_1 \rho^{\beta} + d_1 \rho^{-\beta} + \frac{\rho^3}{9 - \beta^2} \right). \tag{3}$$

Постоянные интегрирования C_1 и d_1 определяются из следующих граничных условий: в центре (ρ=0) и на контуре (ρ=1) угол поворота $\vartheta = 0$. Отсюда $C_1 = -\dfrac{1}{9 - \beta^2}$ и d_1=0.

Подставляя постоянные интегрирования C_1 и d_1 в выражение (3) для ϑ, получим угол поворота

$$\vartheta = \frac{\lambda_p}{9 - \beta^2} \left(\rho^3 - \rho^{\beta} \right). \tag{4}$$

Угол поворота ϑ нормали к срединной плоскости пластинки является производной вертикального прогиба ϖ по радиусу r:

$$\vartheta = \frac{d\varpi}{dr}.$$

Тогда относительный прогиб центра мембраны определяется как

$$\frac{\varpi_0}{R} = \int_1^0 \vartheta d\rho. \tag{5}$$

Подставляя сюда угол поворота из формулы (4), получим ту часть давления, которая определяет сопротивление мембраны изгибу

$$\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_и = \frac{2k_{tp}(3+\beta)(1+\beta)}{3k_{1r}\left(1-\mu^2\,\dfrac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\cdot\frac{\varpi_0}{h}. \qquad (6)$$

Для определения кубического члена характеристики (2) при весьма больших прогибах гофрированной мембраны запишем уравнения абсолютно гибкой мембраны, которые получаются из системы (1), если положить в ней изгибную жесткость $D_{\text{пр}}=0$

$$\begin{aligned} &\rho\psi''+\psi'-\beta^2\cdot\frac{\psi}{\rho}=\frac{k_{1r}}{k_{tp}}\cdot\frac{\vartheta^2}{2};\\ &\psi\vartheta=p_0\rho^2, \end{aligned} \qquad (7)$$

где $p_0=\dfrac{pR}{2Eh}$ - параметр нагрузки.

Уравнения (7) решаем методом Бубнова-Галеркина, задаваясь законом изменения угла поворота

$$\vartheta=C\rho, \qquad (8)$$

это соответствует упругой поверхности, близкой к сферической.

Подставляя ϑ из (8) в первое уравнение системы (7), после интегрирования получим

$$\psi=\frac{C^2k_{1r}}{2k_{tp}}\left(\frac{\rho^3}{9-\beta^2}+a\rho^{\beta}+b\rho^{-\beta}\right). \qquad (9)$$

Постоянная интегрирования b=0, т.к. в центре мембраны (ρ=0) растягивающее усилие имеет конечное значение ($\psi\neq\infty$). Постоянная a зависит от способа закрепления мембраны по наружному контуру. Если радиальное смещение невозможно, то на контуре окружная деформация $\varepsilon_{tp}=0$. Величина ε_{tp} связана с усилиями T_r и T_t законом Гука $\varepsilon_{tp}=\dfrac{k_{tp}}{k_{1r}Eh}\left(T_t-\dfrac{k_{1r}}{k_{tp}}\mu T_r\right)$.

Граничное условие $\left|\varepsilon_{tp}\right|_{\rho=1}=0$, выраженное в безразмерных величинах имеет вид

$$\left|\psi' - \mu \frac{k_{1r}}{k_{tp}} \cdot \frac{\psi}{\rho}\right|_{\rho=1} = 0\,. \qquad (10)$$

Из этого равенства находим постоянную a

$$a = -\frac{1}{9-\beta^2} \cdot \frac{\left(3k_{tp} - \mu k_{1r}\right)}{\left(\beta k_{tp} - \mu k_{1r}\right)}\,.$$

Подставляя угол поворота ϑ (8) и функцию ψ (9) во второе уравнение системы (7), умножим его на ρ в соответствии с методом Бубнова-Галеркина и проинтегрируем в пределах изменения ρ, т.е. от 0 до 1. В результате получим

$$\frac{C^3 k_{1r}}{k_{tp}(9-\beta^2)}\left[\frac{1}{6} - \frac{3k_{tp} - \mu k_{1r}}{(\beta k_{tp} - \mu k_{1r})(\beta + 3)}\right] = \frac{p_0}{2}\,. \qquad (11)$$

Постоянную C можно выразить через прогиб ϖ_0 центра мембраны с помощью выражений (5), (8)

$$\varpi_0 = \int_R^0 \vartheta dr = CR\int_1^0 \rho d\rho = -\frac{CR}{2}\,,$$

откуда $C = -\dfrac{2\varpi_0}{R}$.

Используя последние соотношения, находим кубический член характеристики (2)

$$\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_p = \frac{32k_{1r}}{k_{tp}(9-\beta^2)}\left[\frac{3k_{tp} - \mu k_{1r}}{(\beta k_{tp} - \mu k_{1r})(\beta + 3)} - \frac{1}{6}\right] \cdot \frac{\varpi_0^3}{h^3}\,. \qquad (12)$$

Суммируя выражения (6) и (12) в соответствии с методом наложения, получим уравнение упругой характеристики гофрированной по двум координатным осям мембраны в больших перемещениях

$$\frac{pR^4}{Eh^4} = a\frac{\varpi_0}{h} + b\frac{\varpi_0^3}{h^3}\,, \qquad (13)$$

где $a = \dfrac{2k_{tp}(3+\beta)(1+\beta)}{3k_{1r}\left(1-\mu^2 \dfrac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}$; $b = \dfrac{32k_{1r}}{k_{tp}(9-\beta^2)}\left[\dfrac{3k_{tp}-\mu k_{1r}}{(\beta k_{tp}-\mu k_{1r})(\beta+3)} - \dfrac{1}{6}\right]$. (14)

Анализ показывает, что гофрированные по двум координатным осям мембраны по сравнению с мембранами, гофрированными только в окружном направлении [1, 2], позволяют:

- путем изменения параметров волн гофр в окружном и радиальном направлениях в широких пределах изменять свойства мембран по отношению к внешним возмущениям – резко увеличить изгибную жесткость и снизить жесткость на растяжение по двум координатным осям, что позволяет увеличить линейный участок упругой характеристики в 2…5 раз и собственную частоту колебаний мембраны в 1,5…2 раза [3];
- в 5…10 раз уменьшить металлоемкость конструкций, в которых гофрированные мембраны используются в качестве фланцев, крышек, днищ.

Применение гофрированных по двум координатным осям мембран позволяет улучшить технические характеристики измерительных преобразователей (датчиков давления, расхода, и т.д.), уменьшить расход дефицитных материалов для изготовления мембран.

Известны гофрированные мембраны с трапецеидальными, пильчатыми и синусоидальными профилями волн гофр, для которых в работах [1] и [2] приведены аналитические выражения для коэффициентов анизотропии k_1 и k_2, включая и пологий синусоидальный профиль волн гофр, которые по методу наложения в первом приближении справедливы для гофр в окружном и радиальном направлениях.

Наиболее технологичным профилем волн гофр является синусоидальный, для которого нет аналитических выражений для коэффициентов анизотропии k_1 и k_2=k_p при отношении $\dfrac{H}{l} > \dfrac{1}{8}$ (H – глубина волн гофр, равная удвоенному значению амплитуды синусоиды; l – длина волн гофр). В ряде случаев для малогабаритных изделий требуются мембраны с малой толщиной и более крутыми волнам гофр $\left(0{,}125<\frac{H}{l}<1\right)$. В этом случае коэффициенты k_1 и k_2 определяются через полные эллиптические интегралы I и II рода.

$$k_1=\frac{2}{\pi\sqrt{1-a^2}}\cdot E_0\,; \tag{15}$$

$$k_2=\frac{H^2}{h^2}\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{1-a^2}}\cdot\left[\left(\frac{1}{a^2}-1\right)F_0+\left(2-\frac{1}{a^2}\right)E_0\right]+\frac{2\sqrt{1-a^2}}{\pi}F_0\,, \tag{16}$$

где $F_0=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-a^2\sin\alpha}}$ и $E_0=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-a^2\sin\alpha}\,d\alpha$ - полные эллиптические интегралы I и II рода; $a=\dfrac{\frac{\pi H}{l}}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi H}{l}\right)^2}}$ - модуль эллиптических интегралов; $\alpha=2\pi\frac{x}{l}$ - аргумент; x-текущая координата синусоиды.

Полные эллиптические интегралы I и II рода можно представить в виде рядов [4]:

$$F_0=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-a^2\sin\alpha}}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot a^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot a^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\cdot a^6\right]; \tag{17}$$

$$E_0=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-a^2\sin\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot a^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot\frac{a^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\cdot\frac{a^6}{5}\right]. \tag{18}$$

Подставив значения полных эллиптических интегралов (17), (18) в выражения (15), (16) для коэффициентов k_1 и k_2, получим

$$k_1=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left[1-\frac{a^2}{4}-\frac{3a^4}{64}-\frac{45a^6}{2304}\right]; \tag{19}$$

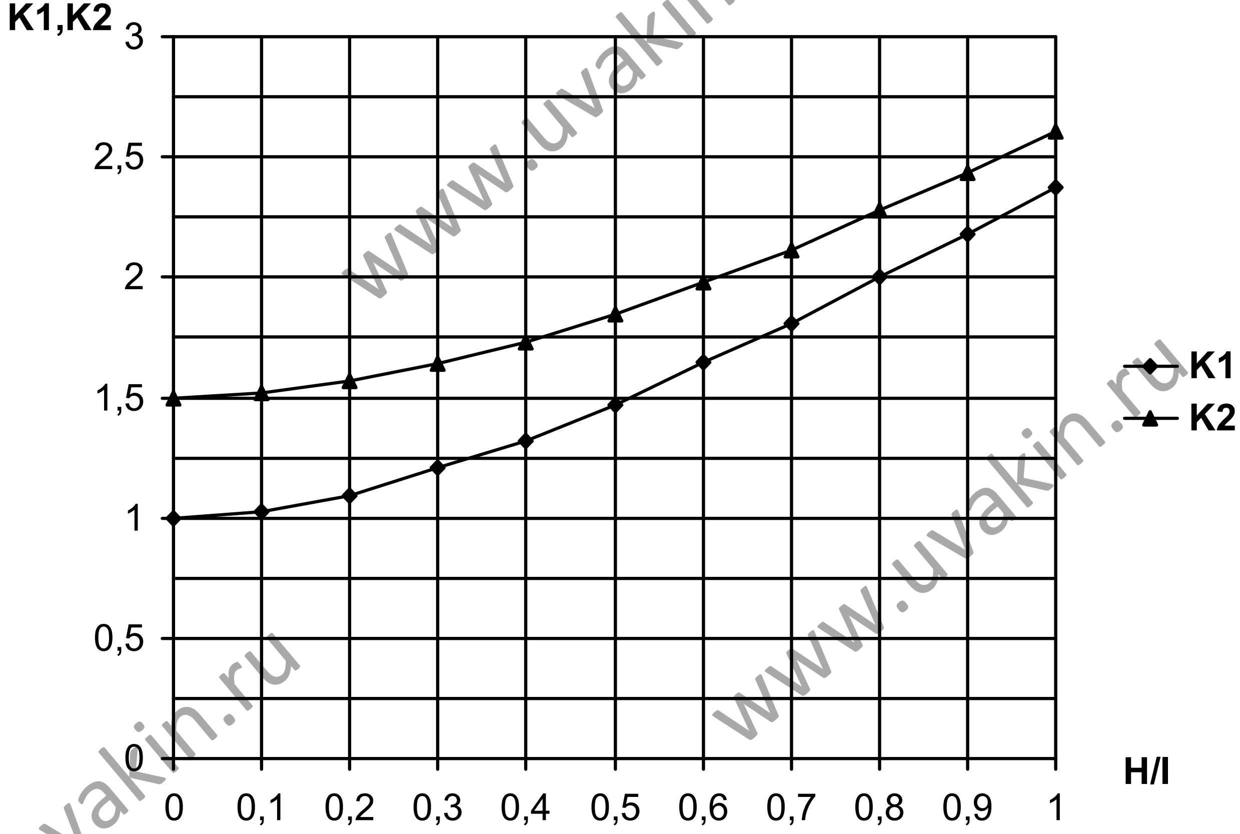
$$k_2=\frac{H^2}{h^2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{1-a^2}}\left[1-\frac{3a^2}{8}-\frac{5a^4}{64}-\frac{35a^6}{384}\right]+\sqrt{1-a^2}\left[1+\frac{a^2}{4}+\frac{9a^4}{64}+\frac{225a^6}{2304}\right]. \tag{20}$$

Последние соотношения будут справедливы при отношениях $\frac{H}{l}\le1$.

На рис. 1 представлены графики изменения коэффициентов анизотропии K1=k_1 и K2=$k_2' = \frac{k_2 \cdot h^2}{H^2}$ в зависимости от отношения $\frac{H}{l}$ при относительной глубине волн гофр $\frac{H}{h} > 8$, из которых видно, что с возрастанием отношения $\frac{H}{l}$ увеличивается диапазон допустимой деформации растяжения до 0,05…0,15, коэффициент анизотропии k_2 также возрастает на 10…15%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1962. – 456 с.
2. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.
3. Электрические измерения неэлектрических величин. Под ред. П.В. Новицкого. – Л.: Энергия, 1975. – 576 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. – С. 757.


K1,K2
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
H/l
K1
K2