

В.П. Шмаков

---

**Избранные труды  
по гидроупругости  
и динамике упругих  
конструкций**

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 539.3 + 532.5  
ББК 22.25  
Ш71

*Рецензент*

зав. кафедрой строительной механики Московского  
авиационного института (Государственного технического  
университета), заслуженный деятель науки,  
д-р техн. наук, проф. *Ф.Н. Шклярчук*

Публикацию подготовил *Ю.Г. Балакирев*

**Шмаков В. П.**

Ш71 Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих  
конструкций / В.П. Шмаков. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Бау-  
мана, 2011. — 287, [1] с. : ил.

ISBN 8-978-5-7038-3420-6

Изложены методы расчета свободных и вынужденных колеба-  
ний упругих оболочек, частично заполненных жидкостью и без нее,  
при произвольных условиях крепления конструкции. Подробно  
рассмотрены методы расчета взаимодействия жидкости с упругой  
конструкцией. Описано применение модифицированного метода,  
разработанного автором на основе метода Бубнова – Галеркина, по-  
зволяющего получить решение краевой задачи при любых гранич-  
ных условиях. Приведены результаты расчета конструкций лета-  
тельных аппаратов.

Книга предназначена для научных работников и инженеров,  
проводящих исследования в области динамики упругих и гидроупру-  
гих систем, а также может представлять интерес для аспирантов и  
студентов-старшекурсников университетов соответствующих специ-  
альностей.

УДК 539.3 + 532.5  
ББК 22.25

ISBN 8-978-5-7038-3420-6

© Балакирев Ю. Г., составление,  
послесловие, 2011  
© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011

### ***В.П. Шмаков – выдающийся ученый в области ракетостроения***

Вячеслав Павлович Шмаков родился в 1935 г., в 1957 г. окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. С 1957 по 1988 г. работал в ЦНИИмаше, в 1964 г. он защитил кандидатскую, а в 1969 г. – докторскую диссертацию по техническим наукам. Ученое звание профессора ему было присвоено в 1979 г.

В.П. Шмаков принимал непосредственное участие в большинстве работ по созданию объектов ракетно-космической техники, с 1970 до 1988 г. возглавлял одно из важнейших научных направлений по динамике и устойчивости движения в ЦНИИмаше, с 1988 г. работал в МГТУ им. Н.Э. Баумана директором НИИ специального машиностроения, а в последние годы жизни – главным научным сотрудником.

Профессор В.П. Шмаков как ученый получил признание в России и за рубежом. Он внес значительный научный вклад в механику и математику. Его научные работы в основном связаны с проблемами машиностроения, в первую очередь ракетно-космической техники. В 1966 г. за успешное выполнение научных государственных программ он награжден орденом «Знак почета», а в 1974 г. за разработку конструктивно подобных моделей и их применение при создании и отработке сложных машин В.П. Шмакову присуждена Государственная премия СССР.

На основании фундаментальных исследований В.П. Шмакова выполнен ряд разработок по следующим направлениям:

- эффективные методы и решения задач гидроупругости оболочек, в частности алгоритмы и программы определения динамических характеристик баков летательных аппаратов, широко применяемые в научных и проектных организациях;

- решения задач динамики оболочек, а также сферических баков, частично заполненных жидкостью;

- обобщение классического метода Бубнова – Галеркина с целью снятия ограничений на выбор системы координатных функций, разработка

теории корректирующих функций, определение взаимосвязи методов Бубнова – Галеркина и улучшения сходимости функциональных рядов А.Н. Крылова, развитие метода суммирования функциональных рядов, представляющих разложения по собственным функциям краевых задач.

Следует отметить существенный вклад В.П. Шмакова в разработку методов анализа динамики упругих модульных конструкций типа российской орбитальной космической станции «Мир» и международной космической станции «Альфа», эффективных методов решения ряда задач динамики сложных модульных конструкций в условиях неопределенности в сечениях сопряжения модулей и больших размерностей их математических моделей, в решение проблемы продольной устойчивости летательных аппаратов с ЖРД и определения динамических нагрузок для защищенных амортизированных объектов, ряда объектов ракетно-космической техники, и в частности системы «Энергия» – «Буран». Впервые разработаны эффективные модели корпусов летательных аппаратов с учетом оболочечных деформаций топливных баков.

Под научным руководством профессора В.П. Шмакова созданы крупномасштабные конструктивно подобные модели и проведены их динамические испытания, что позволило определить комплекс необходимых характеристик для решения проблем управления и стабилизации на участке выведения.

В.П. Шмаков уделял большое внимание подготовке научных кадров, под его руководством защищено свыше 20 кандидатских диссертаций. Среди его учеников три доктора наук. Он являлся членом диссертационных советов, участвовал в организации и проведении конференций и семинаров.

Следует отметить участие В.П. Шмакова в ликвидации последствий аварии на Чернобыльской АЭС.

В.П. Шмаков – автор более 250 научных работ. Под его руководством разработаны и изданы «Справочные материалы для конструкторов по динамике» в 14 книгах.

В книге приведены теоретические труды В.П. Шмакова, имеющие фундаментальное значение при решении вопросов динамики упругих конструкций и задач гидроупругости. Разработанные им методы могут найти широкое применение при решении краевых задач в различных областях науки и техники.

В.П. Шмаков рано ушел из жизни. Выдающийся ученый-ракетчик и талантливый педагог, человек твердых гражданских позиций, он останется в памяти своих учеников, соратников, коллег по работе, товарищей.

Президент МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
академик РАН *И.Б. Федоров*

## *ГЛАВА 1*

# **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК**

---

### **1.1. Введение**

Конструкции оболочечного типа широко применяют в строительстве, судостроении, авиации, ракетостроении и других отраслях промышленности.

Теория оболочек является одним из актуальных разделов теории упругости, которой в последнее время уделяется исключительно большое внимание. Результаты исследований по теории оболочек, приведенные в фундаментальных монографиях В.З. Власова «Общая теория оболочек и ее приложения в технике», В.В. Новожилова «Теория тонких оболочек», А.И. Лурье «Статика тонкостенных упругих оболочек», А.Л. Гольденвейзера «Теория упругих тонких оболочек», получены на основании следующих гипотез Кирхгоффа – Лява:

- прямолинейные волокна, перпендикулярные к срединной поверхности оболочки до деформации, остаются после деформации прямолинейными и перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности, сохраняя при этом свою длину;

- нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями.

Моментная теория оболочек, построенная на этих гипотезах, успешно применяется для решения статических и динамических задач. Однако при решении динамических задач с помощью этой теории следует учитывать, что соответствующие краевые задачи могут оказаться несамосопряженными. Поэтому при решении за-

## ГЛАВА 2

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ОБОЛОЧКУ СО СТОРОНЫ ЖИДКОСТИ, ПРИ ЗАДАННОМ НОРМАЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЕЕ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

---

---

#### 2.1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим упругую оболочку вращения произвольной формы, заполненную частично жидкостью, частично газом. Пусть нормальные перемещения точек срединной поверхности оболочки известны, т. е. известна функция  $w(Y, t)$ , зависящая от координаты точки поверхности и времени.

Обозначим срединную поверхность оболочки  $S$ , ее смоченную поверхность –  $S_0$ , свободную поверхность жидкости (границу раздела между жидкой и газообразной средой) –  $\Sigma$ , область, занятую жидкостью и заключенную внутри замкнутой поверхности  $S_0 + \Sigma$ , –  $Q$ .

Введем следующие допущения.

1. Перемещения оболочки и частиц жидкости малы и можно пренебречь членами второго и более высокого порядка малости по сравнению с линейными.

2. Поле массовых сил, действующих на оболочку и жидкость, является потенциальным. В дальнейшем предполагается, что ускорение поля массовых сил  $j$  коллинеарно продольной оси оболочки.

3. Жидкость – однородная, идеальная и несжимаемая, начальное движение жидкости – безвихревое.

В соответствии с этими допущениями и допущением о потенциальности поля массовых сил движение жидкости, согласно тео-

## ГЛАВА 3

### ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

---

#### 3.1. Сведение системы уравнений возмущенного движения оболочки, частично заполненной жидкостью, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

В данной главе приведены различные виды уравнений возмущенного движения упругой оболочки, частично заполненной жидкостью, сформулированы краевые задачи, служащие для сведения системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и исследованы свойства этих краевых задач.

Для сведения системы уравнений в частных производных (2.104), описывающих возмущенное движение оболочки, частично заполненной жидкостью, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений воспользуемся уравнением (1.9), записанным только применительно к оболочке. Учитывая выражение (2.100) для давления, действующего на оболочку со стороны жидкости, запишем уравнение возможных перемещений для механической системы оболочка–жидкость в виде

$$\delta W = \iint_S \left[ -\rho \delta \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \delta \mathbf{u} \right) + (\mathbf{X}, \delta \mathbf{u}) \right] dS -$$

## ГЛАВА 4

### МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОЛОЧЕК ПРИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

---

#### 4.1. Применение метода Бубнова – Галеркина к задачам о собственных колебаниях упругих оболочек с жидкостью

В предыдущих главах изложен общий подход к решению задачи о колебаниях упругих оболочек, частично заполненных жидкостью, и сформулированы краевые задачи, решения которых служат для сведения общих уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулированные краевые задачи имеют большое практическое и теоретическое значение, так как в большинстве случаев собственные значения и соответствующие им собственные функции можно отождествить с частотами и формами колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью.

В настоящее время применительно к оболочкам вращения разработан ряд эффективных аналитических методов решения краевых задач вида (3.23), (3.27).

Преимущественно эти методы основаны на применении методов Бубнова – Галеркина [37] и Ритца [36], [2], достаточно простых при определении низших частот колебаний. Однако их применение связано с построением координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Такое построение удается выполнить для немногих форм оболочки, встречающихся на практике. Поэтому более перспективным является метод, основанный на вариационном уравнении Кастильяно, который приме-





## ГЛАВА 6

### ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАМКНУТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ

---

#### 6.1. Постановка задачи

В настоящее время задача о колебаниях сферической оболочки, несмотря на достаточно большое число публикаций, является, по существу, нерешенной вследствие больших затруднений математического и вычислительного характера.

Наиболее полный метод решения данной задачи предложен в работах [18, 26], в которых решение представлено через сферические функции в общем случае комплексного порядка.

Однако при практическом применении приведенного в этих работах метода возникают следующие трудности.

1. При определении собственных частот и форм колебаний необходимо неоднократно вычислять определитель, элементами которого являются сферические функции в общем случае комплексного порядка. Как известно, определение таких функций представляет чрезвычайно сложную задачу даже при применении ЭВЦМ, так как их аналитические и интегральные представления обладают плохой сходимостью.

2. При определении значений  $\lambda$ , являющихся собственными частотами, при применении метода работ [18, 26] существует опасность пропуска корней частотного уравнения, особенно в случае, когда данная частота лежит в окрестности точки сгущения  $\lambda^2 = 1 - \mu^2$ .

3. При определении форм колебаний необходимо вычислять  $\lambda$  с большой точностью, поскольку данный параметр не является

## ГЛАВА 7

### МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

---

#### 7.1. Определение потенциала смещений и постановка задачи

В настоящее время среди принятых методов решения задач о собственных колебаниях упругих оболочек вращения, частично или целиком заполненных жидкостью, наибольшее применение получили методы Ритца [16, 36] и Бубнова – Галеркина [4, 31, 37].

В данной главе приведен численный метод расчета динамических характеристик (частоты и формы собственных колебаний) упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью. При определении реакции оболочки с жидкостью на произвольную гармоническую нагрузку путем введения гипотезы комплексного модуля упругости учитывается рассеяние энергии в материале оболочки.

Рассмотрим оболочку вращения. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – ортогональные координаты, определяющие положение произвольной точки на срединной поверхности,  $n$  – внешняя нормаль к этой поверхности,  $u_1, u_2, u_3$  – касательные и нормальное перемещения,  $u_3 = w$ .

Перемещение частиц жидкости характеризуется потенциалом смещений  $\Phi$ , который является гармонической функцией в области  $Q$ , занятой жидкостью. Для смоченной поверхности оболочки  $S$  и свободной поверхности жидкости  $\Sigma$  можно записать

## ПОСЛЕСЛОВИЕ

---

Как составителю мне хотелось бы привести несколько заключительных суждений относительно представленных результатов исследований, выполненных Вячеславом Павловичем Шмаковым в период с 1961 по 1985 гг., когда он работал в Центральном научно-исследовательском институте машиностроения (ЦНИИмаше). В книге рассмотрены разработанные им методы расчета свободных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, частично заполненных несжимаемой жидкостью, при различных граничных условиях.

В предлагаемом читателям издании мною добавлены лишь подписи к некоторым рисункам и таблицам. Книга увидела свет благодаря усилиям ученого секретаря ЦНИИмаша И.В. Ершова, заместителя генерального директора ЦНИИмаша О.П. Клишева и доброй воле руководства МГТУ им. Н.Э. Баумана, прежде всего его президента – академика РАН И.Б. Федорова. В подготовке электронной версии книги принимали участие многие ученики и соратники автора по ЦНИИмашу, его сын А.В. Шмаков и жена Н.Ф. Шмакова.

Приведенные в книге методы расчета динамических характеристик упругих оболочек с жидкостью были пионерскими работами в то время и не потеряли своей актуальности и сегодня. Вычислительные алгоритмы впервые были применены при анализе динамики практически всех отечественных жидкостных ракет-носителей, включая РН «Зенит» и РН «Энергия».

Особо следует выделить метод, разработанный автором в 1964–1967 гг. на основе метода Бубнова – Галеркина, который позволяет получить решение краевой задачи при использовании координатных функций, не удовлетворяющих всем краевым условиям. Такое название автор использовал в первой открытой публикации метода в 1967 г., так он называется и в данной книге. В последующей публикации в 1981 г. этот метод назван методом корректирующих функций. Автор и его ученики разработали методы введения корректирующих функций в задачах синтеза динамических характеристик составных конструкций по динамическим характеристикам составляющих модулей.

Анализ этого метода, проведенный в связи с подготовкой данной книги по публикациям автора и его учеников, представлен в серии



развал решения в задачах синтеза, когда решение формально записано, а результат расчета оказывается неверным из-за ошибок при вычислении.

Предложенный В.П. Шмаковым модифицированный метод (или метод корректирующих функций) является несомненным прогрессом в разработке методов анализа динамики упругих, гидроупругих и гидродинамических систем. Этот метод позволяет получать эталонные решения для достаточно широкого круга задач с определенными граничными условиями, а в общем случае – решения для систем с произвольными граничными условиями.

С помощью корректирующих функций выделяют суммы плохо сходящихся рядов в получаемых частотных уравнениях и в выражениях для форм колебаний. Однако вместо плохо сходящихся рядов в частотных уравнениях появляется разность близких чисел, одно из которых вычисляют по конечной аналитической формуле, а другое представлено хорошо сходящимся рядом, суммировать который следует с определенной осторожностью. С помощью процедуры ортогонализации корректирующего ряда к координатным функциям удалось на частных примерах выделить плохо сходящиеся ряды в решении и получить выражения для определения разности близких чисел в нем.

Следует иметь в виду, что число учтенных координатных функций определяет исследуемый частотный диапазон для конструкции, а корректирующий ряд позволяет устранить невязки в граничных условиях и повысить точность вычисления в этом частотном диапазоне. Кроме того, корректирующий ряд не позволяет увеличить число вычисляемых частот колебаний исследуемой конструкции. Полученные точные решения ряда задач динамики оболочек и гидроупругости могут служить эталоном при оценке эффективности вновь разрабатываемых методов.

Методы анализа механических систем являются актуальным направлением в области исследования динамики упругих конструкций. Развитие методов, предложенных В.П. Шмаковым, продолжается, и в будущем можно ожидать появления новых более совершенных их вариантов.

Профессор кафедры прикладной  
и вычислительной математики  
МГТУ «МАМИ» д-р техн. наук  
Ю.Г. Балакирев

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. *Абрамов А.А.* О переносе граничных условий для систем линейных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. I. № 3.
2. *Александрович Л.И., Лампер Р.Е.* Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура // Тр. VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966.
3. *Балабух Л.И.* Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом // Тр. VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966.
4. *Бублик Б.Н., Меркулов В.И.* О динамической устойчивости упругих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости и наполненных жидкостью // Сб.: Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью. М.: ВЦ АН СССР, 1962.
5. *Власов В.З.* Избранные труды. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
6. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.
7. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1961. Т. XVI. Вып. 3(99).
8. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953.
9. *Григолюк Э.И., Горшков А.Г., Шклярчук Ф.Н.* Об одном методе расчета колебаний жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения // Изв. АН СССР, МЖГ. 1968. № 3.
10. *Григолюк Э.И., Мальцев В.П., Мяченков В.И., Фролов А.Н.* Об одном методе решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 1.
11. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Василенко А.Т., Петрова А.И.* О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении // Сб. Применение ЭВМ в строительной механике. Киев: Наукова думка, 1968.
12. *Грей Э., Мэтьюз Г.Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: ИЛ, 1949.
13. *Кочин Н.Е., Кибель Н.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1948.
14. *Кулешиов В.Б., Швейко Ю.Ю.* Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 3.

15. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: ГИФМЛ, 1963.
16. *Лампер Р.Е., Тесленко А.А.* О системе функций и численной сходимости при применении метода Ритца к колебаниям упругого сосуда // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 5.
17. *Лейбензон Л.С.* О натуральных периодах колебаний плотин, подпирающих реку // Собрание трудов. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
18. *Лужин О.В.* Осесимметричные колебания сферических куполов при различных граничных условиях // Исследования по теории сооружений. Вып. XI. М.: Госстройиздат, 1962.
19. *Лурье А.И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
20. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
21. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968.
22. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: ГИТТЛ, 1957.
23. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
24. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
25. *Муштарь Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957.
26. *Нагди П.М., Калнинс А.* О колебаниях упругих сферических оболочек // Прикладная механика. 1962. № 1.
27. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. М.: Судпромгиз, 1962.
28. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1942.
29. *Петров Г.И.* Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 3.
30. *Рабинович Б.И.* Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности // Изв. АН СССР, ОТН. Сер. Механика и машиностроение. 1959. № 4.
31. *Рабинович Б.И.* Об уравнениях поперечных колебаний оболочек с жидким заполнением // Изв. АН СССР. ОТН. Сер. Механика и машиностроение. 1964. № 1.
32. *Рапопорт И.М.* Динамика оболочки, частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение. 1967.
33. *Сорокин Е.С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Стройиздат, 1960.
34. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963.



35. *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. / Киев: Наукова думка, 1969.
36. *Шклярчук Ф.Н.* О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Тр. VI Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966.
37. *Шмаков В.П.* Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением // Изв. АН СССР. ОТН. Сер. Механика и машиностроение. 1964. № 1.
38. *Шмаков В.П.* Об одном методе интегрирования уравнения осесимметричных колебаний сферической оболочки // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 2.
39. *Шмаков В.П.* Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова–Галеркина к решению краевых задач // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 5.
40. *Шмаков В.П.* Методы решения задач о колебаниях оболочек, частично заполненных жидкостью, и их численная реализация // Тезисы докл. 3-го Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. М., 1968.
41. *Шмаков В.П.* О колебаниях непологих сферических оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3.
42. *Lindholm U.S., Kana D.D., Abramson H.N.* Breathing vibration of a circular cylindrical shell with internal liquid // J.AerospaceSci. 1962.Vol. 29. No 9.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>В.П. Шмаков – выдающийся ученый в области ракетостроения</b> .....	3
<b>Глава 1. Краткие сведения об общей теории тонких упругих оболочек</b> .....	5
1.1. Введение .....	5
1.2. Деформация срединной поверхности оболочки и соотношения упругости в теории оболочек .....	6
1.3. Уравнения равновесия и собственных колебаний тонких упругих оболочек .....	11
1.4. Каноническая форма уравнений теории тонких оболочек вращения .....	21
1.5. Собственные колебания упругих оболочек .....	31
1.6. Уравнения динамического равновесия упругих оболочек с учетом предварительного напряженного состояния, действующего в срединной поверхности .....	36
<b>Глава 2. Определение гидродинамического давления, действующего на оболочку со стороны жидкости, при заданном нормальном перемещении ее срединной поверхности</b> .....	40
2.1. Постановка задачи и основные уравнения .....	40
2.2. Две формы представления потенциала смещения .....	44
2.3. Точные решения краевых задач для некоторых частных случаев .....	50
2.4. Приближенный метод решения задачи о потенциале смещений для произвольной оболочки вращения, целиком заполненной жидкостью .....	54
2.5. Приближенный метод решения задачи о потенциале смещений для оболочки вращения, частично заполненной жидкостью .....	63
2.6. Приближенное решение гидродинамической задачи в цилиндрических координатах .....	69
2.7. Определение давления, действующего на оболочку со стороны жидкости .....	72
<b>Глава 3. Общие уравнения возмущенного движения упругой оболочки, частично заполненной жидкостью</b> .....	78
3.1. Сведение системы уравнений возмущенного движения оболочки, частично заполненной жидкостью, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений .....	78

3.2. Формулировка краевых задач, обеспечивающих сведение уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений .....	85
3.3. Уравнения возмущенного движения оболочки в нормальной форме Коши .....	90
<b>Глава 4. Методы определения динамических характеристик оболочек при собственных колебаниях .....</b>	<b>95</b>
4.1. Применение метода Бубнова – Галеркина к задачам о собственных колебаниях упругих оболочек с жидкостью .....	95
4.2. Применение метода Бубнова – Галеркина к задачам о собственных колебаниях упругих оболочек с жидкостью в случае естественных граничных условий. Собственные колебания сферической оболочки с жидкостью .....	103
4.3. Построение общих решений уравнений колебаний оболочек с жидкостью.....	115
4.4. Видоизмененный метод Бубнова – Галеркина и его применение к задачам о колебаниях оболочек с жидкостью .....	127
<b>Глава 5. Колебания сферической оболочки, частично заполненной жидкостью .....</b>	<b>148</b>
5.1. Осесимметричные колебания оболочки в виде сферического сегмента, частично заполненного жидкостью .....	148
5.2. Осесимметричные колебания сферической оболочки, частично заполненной жидкостью .....	159
5.3. Исследование зависимости спектра частот осесимметричных колебаний упругой сферической оболочки, частично заполненной жидкостью, от граничных условий и уровня заполнения .....	172
5.4. Неосесимметричные колебания замкнутой сферической оболочки .....	183
<b>Глава 6. Осесимметричные колебания замкнутых сферических оболочек и сферических куполов .....</b>	<b>197</b>
6.1. Постановка задачи .....	197
6.2. Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки .....	198
6.3. Вывод дифференциальных уравнений свободных колебаний сферической оболочки .....	206
6.4. Осесимметричные колебания односрезных сферических оболочек (куполов) .....	210
6.5. Граничные условия других видов при исследовании осесимметричных колебаний односрезных сферических оболочек (куполов) .....	217

---

6.6. Другая форма представления решения задачи о колебании шарнирно опертого купола .....	221
6.7. Некоторые численные результаты .....	225
6.8. Осесимметричные колебания замкнутой сферической оболочки .....	235
<b>Глава 7. Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью .....</b>	<b>249</b>
7.1. Определение потенциала смещений и постановка задачи .....	249
7.2. Решение вспомогательной краевой задачи .....	253
7.3. Алгоритм расчета динамических характеристик упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью .....	255
7.4. Метод ортогональной прогонки .....	261
7.5. Расчетная схема исследования собственных и вынужденных осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью .....	265
7.6. Собственные колебания эллипсоидальной оболочки .....	272
<b>Послесловие .....</b>	<b>279</b>
<b>Литература .....</b>	<b>282</b>