УДК 62-278

В.Ф. Увакин, В.Б. Олькова

РАСЧЕТ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОФРИРОВАННОЙ В ОКРУЖНОМ И РАДИАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИЯХ МЕМБРАНЫ С ЖЕСТКИМ ЦЕНТРОМ, НАГРУЖЕННОЙ ДАВЛЕНИЕМ

Можно показать, что нелинейные дифференциальные уравнения упругой характеристики гофрированной по двум координатным осям мембраны с постоянными волнами гофр в окружном и радиальном направлениях, нагруженной давлением p, имеют вид:

$$\begin{aligned} &\rho\psi''+\psi'-\beta^2\cdot\frac{\psi}{\rho}=\frac{k_{1r}}{k_{tp}}\cdot\frac{\vartheta^2}{2};\\ &\rho\vartheta''+\vartheta'-\beta^2\cdot\frac{\vartheta}{\rho}=\frac{R^2}{D_{пр}}\left(-\psi Eh\vartheta+\frac{pR}{2}\rho^2\right); \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\psi=-\dfrac{T_r\rho}{Eh}$; $\rho=\dfrac{r}{R}$; $\beta^2=\dfrac{k_{rp}k_{1r}}{k_{tp}k_{1t}}$; $D_{пр}=\dfrac{Eh^3}{12}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\mu^2\dfrac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\cdot\dfrac{k_{tp}}{k_{1r}}$,

Ψ- функция радиального усилия; ρ- безразмерный радиус мембраны; R, r – наружный и текущий радиусы мембраны; β^2- безразмерный параметр; ϑ - угол поворота нормали к срединной поверхности анизотропной пластины; $D_{пр}$- приведенное значение изгибной жесткости гофрированной по двум направлениям мембраны; T_r - растягивающая сила в радиальном направлении, отнесенная к единице длины дуги; p – давление на мембрану; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала мембраны; h – толщина мембраны; k_{1r}, $k_{r\text{р}}$ и k_{1t}, $k_{t\text{р}}$ – коэффициенты анизотропии в радиальном и окружном направлениях плоской анизотропной мембраны, зависящие только от геометрии профиля волн гофр и толщины мембраны h [1, 2](символ ()' означает производную $\dfrac{d()}{d\rho}$).

Предположим, что упругая характеристика гофрированной мембраны с жестким центром описывается кубическим уравнением в безразмерных параметрах

$$\overline{p}=\frac{pR^4}{Eh^4}=a_p\frac{\varpi_ц}{h}+b_p\frac{\varpi_ц^3}{h^3}, \qquad (2)$$

где линейный член соответствует сопротивлению эквивалентной анизотропной мембраны изгибу ($\overline{p_{иц}}=a_p\dfrac{\varpi_ц}{h}$) и определяется из решения задачи о малых прогибах мембраны, кубический член характеризует сопротивление мембраны растяжению ($\overline{p_{рц}}=b_p\dfrac{\varpi_ц^3}{h^3}$), для его определения необходимо рассмотреть задачу об абсолютно гибкой анизотропной мембране; $\varpi_ц$ – прогиб жесткого центра мембраны радиусом ρ_0 под действием давления p.

Уравнения мембраны при малых прогибах и абсолютно гибкой мембраны можно получить как предельные случаи из дифференциальных уравнений (1) плоской анизотропной мембраны.

Полагая при малых прогибах функцию растягивающего усилия $\psi=0$, получим из системы (1) линейное уравнение плоской анизотропной мембраны

$$\rho\vartheta''+\vartheta'-\beta^2\frac{\vartheta}{\rho}=\lambda_p\rho^2,$$

где $\lambda_p=\dfrac{pR^3}{2D_{пр}}$ - параметр нагрузки.

Решение этого линейного уравнения с учетом условий (на наружном ($\rho=1$) и внутреннем ($\rho=\rho_0$) контурах угол поворота $\vartheta=0$) запишем в виде

$$\vartheta=\frac{\lambda_p}{9-\beta^2}\left[\rho^3-\frac{(1-\rho_0^{3+\beta})}{1-\rho_0^{2\beta}}\rho^{\beta}+\frac{\rho_0^{2\beta}(1-\rho_0^{3-\beta})}{1-\rho_0^{2\beta}}\rho^{-\beta}\right]. \qquad (3)$$

Относительный прогиб жесткого центра мембраны определяется как

$$\frac{\varpi_ц}{R}=\int_1^{\rho_0}\vartheta d\rho. \qquad (4)$$

Подставляя сюда угол поворота из формулы (3), получим ту часть давления, которая определяет сопротивление мембраны изгибу

$$\overline{p_{иц}}=\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_{иц}=\frac{2k_{tp}(9-\beta^2)(1-\beta^2)}{3k_{1r}\left(1-\mu^2\dfrac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(3+\beta^2\right)\left(1-\rho_0^4\right)+\dfrac{4\beta}{1-\rho_0^{2\beta}}\left[2\rho_0^{1+\beta}\left(1+\rho_0^2\right)-\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)\left(1+\rho_0^4\right)\right]}\cdot\frac{\varpi_ц}{h}. \qquad (5)$$

Для определения кубического члена характеристики мембраны полагаем изгибную жесткость $D_{пр}=0$, тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\rho\psi''+\psi'-\beta^2\cdot\frac{\psi}{\rho}=\frac{k_{1r}}{k_{tp}}\cdot\frac{\vartheta^2}{2};$$
$$\psi\vartheta=p_0\rho^2, \qquad (6)$$

где $p_0=\dfrac{pR}{2Eh}$ - параметр нагрузки.

Уравнения (6) решаем методом Бубнова-Галеркина, задаваясь законом изменения угла поворота

$$\vartheta = C\rho , \qquad (7)$$

что соответствует упругой поверхности, близкой к сферической.

Подставляя ϑ из уравнения (7) в первое уравнение системы (6), после интегрирования получим

$$\psi = \frac{C^2 k_{1r}}{2k_{tp}} \left(\frac{\rho^3}{9-\beta^2} + a\rho^{\beta} + b\rho^{-\beta} \right). \qquad (8)$$

Постоянные интегрирования a и b зависят от способа закрепления мембраны по наружному контуру. Если радиальное смещение невозможно, то окружные деформации на наружном контуре мембраны (ρ=1) и жесткого центра ($\rho=\rho_0$) равны нулю.

Величина ε_t связана с усилиями T_r и T_t законом Гука в соответствии с формулой

$$\varepsilon_{tp} = \frac{k_{tp}}{k_{1r} Eh} \left(T_t - \frac{k_{1r}}{k_{tp}} \mu T_r \right). \qquad (9)$$

Граничные условия $\left|\varepsilon_{tp}\right|_{\rho=1} = 0$ и $\left|\varepsilon_{tp}\right|_{\rho=\rho_0} = 0$, выраженные в безразмерных величинах, имеют вид

$$\left| \psi' - \mu \frac{k_{1r}}{k_{tp}} \cdot \frac{\psi}{\rho} \right|_{\rho=1} = 0 ; \quad \left| \psi' - \mu \frac{k_{1r}}{k_{tp}} \cdot \frac{\psi}{\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0 . \qquad (10)$$

Из этих равенств находим постоянные интегрирования a и b

$$a = -\frac{1}{9-\beta^2} \cdot \frac{\left(3k_{tp} - \mu k_{1r}\right)\left(1-\rho_0^{3+\beta}\right)}{\left(\beta k_{tp} - \mu k_{1r}\right)\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)} ; \; b = \frac{1}{9-\beta^2} \cdot \frac{\left(3k_{tp} - \mu k_{1r}\right)\left(1-\rho_0^{\beta-3}\right)\rho_0^{3+\beta}}{\left(\beta k_{tp} + \mu k_{1r}\right)\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)} . \qquad (11)$$

Подставим угол поворота ϑ (7) и функцию ψ растягивающего усилия (8) во второе уравнение системы (6), умножим его на ρ в соответствии с методом Бубнова-Галеркина и проинтегрируем в пределах изменения ρ, т.е. от 1 до ρ_0. В результате получим

$$\frac{C^3 k_{1r}}{k_{tp}(9-\beta^2)} \left[\frac{\rho_0^6 - 1}{6} + \frac{\left(3k_{tp} - \mu k_{1r}\right)\left(1-\rho_0^{3+\beta}\right)^2}{\left(\beta k_{tp} - \mu k_{1r}\right)\left(\beta+3\right)\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(3ktp - \mu k1r\right)\left(1-\rho_0^{\beta-3}\right)\left(\rho_0^{3-\beta} - 1\right)\rho_0^{3+\beta}}{\left(\beta ktp + \mu k1r\right)\left(3-\beta\right)\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)} \right] = p_0 \frac{\rho_0^4 - 1}{4} . \qquad (12)$$

Постоянную C определим из уравнения (4)

$$C = -\frac{2\varpi_ц}{R\left(1-\rho_0^2\right)}. \tag{13}$$

Подставляя выражение (13) в уравнение (12) после преобразований получим кубический член характеристики (2)

$$\overline{p_{рц}} = \left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_{рц} = \frac{32k_{1r}}{k_{tp}(9-\beta^2)\left(1-\rho_0^2\right)^4\left(1+\rho_0^2\right)} \times$$

$$\times\left[\frac{1-\rho_0^6}{6} - \frac{3k_{tp}-\mu k_{1r}}{1-\rho_0^{2\beta}}\left\{\frac{\left(1-\rho_0^{3+\beta}\right)^2}{\left(\beta k_{tp}-\mu k_{1r}\right)(3+\beta)} + \frac{\left(\rho_0^{\beta}-\rho_0^3\right)^2}{\left(\beta k_{tp}+\mu k_{1r}\right)(3-\beta)}\right\}\right]\cdot\frac{\varpi_ц^3}{h^3}. \tag{14}$$

Суммируя выражения (5) и (14) в соответствии с методом наложения, получим уравнение упругой характеристики гофрированной в окружном и радиальном направлениях мембраны с жестким центром (2), в котором коэффициенты a_p и b_p равны

$$a_p = \frac{2k_{tp}(9-\beta^2)(1-\beta^2)}{3k_{1r}\left(1-\mu^2\frac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\cdot\frac{1}{\left(3+\beta^2\right)\left(1-\rho_0^4\right)+\frac{4\beta}{1-\rho_0^{2\beta}}\left[2\rho_0^{1+\beta}\left(1+\rho_0^2\right)-\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)\left(1+\rho_0^4\right)\right]};$$

$$b_p = \frac{32k_{1r}}{k_{tp}(9-\beta^2)\left(1-\rho_0^2\right)^4\left(1+\rho_0^2\right)}\left\{\frac{1-\rho_0^6}{6} - \frac{3k_{tp}-\mu k_{1r}}{1-\rho_0^{2\beta}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\left(1-\rho_0^{3+\beta}\right)^2}{\left(\beta k_{tp}-\mu k_{1r}\right)(3+\beta)} + \frac{\left(\rho_0^{\beta}-\rho_0^3\right)^2}{\left(\beta k_{tp}+\mu k_{1r}\right)(3-\beta)}\right]\right\}. \tag{15}$$

Учитывая, что из условия малой нелинейности упругой характеристики гофрированной мембраны должно выполняться условие $b_p \ll a_p$, то заметное влияние жесткого центра на упругую характеристику проявляется при $\rho_0 > 0{,}3$.

Для мембран без жесткого центра $\rho_0=0$ и уравнения (5) и (14) примут вид

$$\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_u = \frac{2k_{tp}(3+\beta)(1+\beta)}{3k_{1r}\left(1-\mu^2\frac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\cdot\frac{\varpi_0}{h}; \tag{16}$$

$$\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_p = -\frac{32k_{1r}}{k_{tp}(9-\beta^2)}\left[\frac{3k_{tp}-\mu k_{1r}}{(\beta k_{tp}-\mu k_{1r})(\beta+3)}-\frac{1}{6}\right]\cdot\frac{\varpi_0^3}{h^3},$$

(17)

где ϖ_0 – относительный прогиб центра мембраны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1962. – 456 с.

2. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.

УДК 62-278

В.Ф. Увакин, В.Б. Олькова

РАСЧЕТ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОФРИРОВАННОЙ В ОКРУЖНОМ И РАДИАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИЯХ МЕМБРАНЫ С ЖЕСТКИМ ЦЕНТРОМ, НАГРУЖЕННОЙ В ЦЕНТРЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

Можно показать, что нелинейные дифференциальные уравнения упругой характеристики гофрированной по двум координатным осям мембраны с постоянными волнами гофр в окружном и радиальном направлениях, нагруженной в центре сосредоточенной силой Q,имеют вид:

$$\begin{aligned} &\rho\psi''+\psi'-\beta^2\cdot\frac{\psi}{\rho}=\frac{k_{1r}}{k_{tp}}\cdot\frac{\vartheta^2}{2}; \\ &\rho\vartheta''+\vartheta'-\beta^2\cdot\frac{\vartheta}{\rho}=\frac{R^2}{D_{пр}}\left(-\psi Eh\vartheta+\frac{Q}{2\pi\cdot R}\right); \end{aligned} \tag{1}$$

где $\psi=-\frac{T_r r}{EhR}$ - функция радиального усилия; T_r - растягивающая сила в радиальном направлении, отнесенная к единице длины дуги; $\rho=\frac{r}{R}$ - безразмерный радиус мембраны; R, r – наружный и текущий радиусы мембраны; $\beta^2=\frac{k_{rp}k_{1r}}{k_{tp}k_{1t}}$ - безразмерный параметр; ϑ - угол поворота нормали к срединной поверхности анизотропной плоской мембраны; $D_{пр}=\frac{Eh^3}{12}\cdot\frac{1}{\left(1-\mu^2\frac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\cdot\frac{k_{tp}}{k_{1r}}$ - приведенное значение изгибной жесткости гофрированной в окружном и радиальном направлениях мембраны; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала мембраны; h – средняя толщина гофрированной мембраны; k_{1r}, $k_{r\text{р}}$ и k_{1t}, $k_{t\text{р}}$ – коэффициенты анизотропии в радиальном и окружном направлениях плоской анизотропной мембраны толщиной h, зависящие только от геометрии профиля волн гофр и толщины мембраны [1, 2].

Символ ()' означает производную $\dfrac{d()}{d\rho}$.

Для получения линейного члена упругой характеристики гофрированной мембраны по методу наложения положим в уравнениях (1) функцию растягивающего усилия ψ=0. В результате этого получим дифференциальное уравнение анизотропной мембраны в малых перемещениях

$$\rho\vartheta''+\vartheta'-\beta^2\frac{\vartheta}{\rho}=\frac{QR}{2\pi\cdot D_{пр}}. \qquad (2)$$

Это уравнений имеет следующее решение

$$\vartheta=\frac{QR}{2\pi\cdot D_{пр}}\left(a\rho^{\beta}+b\rho^{-\beta}+\frac{\rho}{1-\beta^2}\right). \qquad (3)$$

Постоянные интегрирования a и b определяем из граничных условий для мембраны с жестким центром с относительным радиусом ρ_0: угол поворота $\vartheta=0$ как на внутреннем (при $\rho=\rho_0$), так и на наружном ($\rho=1$) контурах, и подставляем в уравнение (3)

$$\vartheta=\frac{QR}{2\pi\cdot D_{пр}(1-\beta^2)}\left[\rho-\frac{\left(1-\rho_0^{1+\beta}\right)}{\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)}\rho^{\beta}+\frac{\left(\rho_0^{2\beta}-\rho_0^{1+\beta}\right)}{\left(1-\rho_0^{2\beta}\right)}\rho^{-\beta}\right]. \qquad (4)$$

Относительный прогиб жесткого центра мембраны вычислим по формуле

$$\frac{\varpi_{Ц}}{R}=\int_1^{\rho_0}\vartheta d\rho=\frac{QR}{2\pi\cdot D_{Пр}\left(1-\beta^2\right)}\left\{\left(1+\beta^2\right)\left(1-\rho_0^2\right)+\frac{2\beta}{1-\rho_0^{2\beta}}\left[4\rho_0^{1+\beta}-\left(1+\rho_0^2\right)\left(1+\rho_0^{2\beta}\right)\right]\right\}. \qquad (5)$$

В результате преобразований получим ту часть давления, которая соответствует сопротивлению мембраны изгибу

$$\left(\frac{QR^2}{\pi Eh^4}\right)_{иц}=a_{Qц}\cdot\frac{\varpi_{ц}}{h}, \qquad (6)$$

где

$$a_{Qц}=\frac{k_{tp}(1-\beta^2)^2}{k_{1r}\left(1-\mu^2\dfrac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\beta^2\right)\left(1-\rho_0^2\right)+\dfrac{2\beta}{1-\rho_0^{2\beta}}\left[4\rho_0^{1+\beta}-\left(1+\rho_0^{2\beta}\right)\left(1+\rho_0^2\right)\right]}. \qquad (7)$$

Кубический член упругой характеристики соответствует сопротивлению мембраны растяжению, которое имеет место при весьма больших прогибах. В этом случае поведение мембраны может быть описано уравнениями абсолютно гибкой анизотропной пластинки, которые получаются из системы уравнений (1), если принять изгибную жесткость $D_{пр}$=0

$$\rho\psi''+\psi'-\beta^2\cdot\frac{\psi}{\rho}=\frac{k_{1r}}{k_{tp}}\cdot\frac{\vartheta^2}{2};\qquad\qquad (8)$$
$$\psi\vartheta=Q_0,$$

где $Q_0=\dfrac{Q}{2\pi REh}$ - параметр нагрузки.

Уравнения (8) будем решать по методу Галеркина. При нагружении анизотропной пластинки, защемленной по наружному контуру, сосредоточенной силой можно представить, что ее упругая поверхность будет близка к конической. В соответствии с этим зададимся выражением угла поворота $\vartheta=C$.

Постоянную C можно выразить через прогиб жесткого центра

$$C=-\frac{\varpi_{ц}}{R(1-\rho_0)}.\qquad (9)$$

Подстановка $\vartheta=C$ в первое уравнение системы (8) и его интегрирование дают

$$\psi=\frac{C^2k_{1r}}{2k_{tp}}\left(\frac{\rho}{1-\beta^2}+A\rho^{\beta}+B\rho^{-\beta}\right).\qquad (10)$$

Постоянные A и B находим из следующих граничных услрвий: при $\rho=\rho_0$ и при $\rho=1$ $\Psi'-\mu\dfrac{\Psi}{\rho}=0$, что соответствует отсутствию радиального смещения на внутреннем и наружном контурах мембраны, отсюда получим

$$A=-\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\frac{(k_{tp}-\mu k_{1r})(1-\rho_0^{1+\beta})}{(\beta k_{tp}-\mu k_{1r})(1-\rho_0^{2\beta})};$$
$$B=\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\frac{(k_{tp}-\mu k_{1r})(\rho_0^{1+\beta}-\rho_0^{2\beta})}{(\beta k_{tp}+\mu k_{1r})(1-\rho_0^{2\beta})}.\qquad (11)$$

Интегрирование уравнения Галеркина

$$\int_{\rho_0}^{1}(\Psi\vartheta-Q_0)d\rho=0\qquad (12)$$

приводит к уравнению

$$\frac{k_{1r}C^3}{k_{tp}2\cdot(1-\beta^2)}\left\{\frac{1-\rho_0^2}{2}-\frac{(k_{tp}-\mu k_{1r})}{(1-\rho_0^{2\beta})}\left[\frac{(1-\rho_0^{1+\beta})^2}{(1+\beta)(\beta k_{tp}-\mu k_{1r})}+\frac{(\rho_0^{\beta}-\rho_0)^2}{(1-\beta)(\beta k_{tp}+\mu k_{1r})}\right]\right\}=Q_0(1-\rho_0).\qquad (13)$$

Подставив значение параметра нагрузки Q_0 и постоянной C из соотношения (9) в уравнение (13), получим ту часть нагрузки, которая соответствует сопротивлению мембраны растяжению

$$\left(\frac{QR^2}{\pi Eh^4}\right)_{рц} = b_{Qц} \cdot \frac{\varpi_ц^3}{h^3}, \tag{14}$$

где

$$b_{Qц} = \frac{k_{1r}}{k_{tp}(\beta^2 - 1)\left(1 - \rho_0\right)^4}\left[\frac{1 - \rho_0^2}{2} - \frac{k_{tp} - \mu k_{1r}}{1 - \rho_0^{2\beta}}\left\{\frac{\left(1 - \rho_0^{1+\beta}\right)^2}{\left(\beta k_{tp} - \mu k_{1r}\right)\left(1 + \beta\right)} + \frac{\left(\rho_0^{\beta} - \rho_0\right)^2}{\left(\beta k_{tp} + \mu k_{1r}\right)\left(1 - \beta\right)}\right\}\right]. \tag{15}$$

Суммируя по методу наложения выражения (6) и (14), получим уравнение упругой характеристики гофрированной в окружном и радиальном направлениях мембраны с жестким центром, нагруженной в центре сосредоточенной силой *Q*

$$\frac{QR^2}{\pi Eh^4} = a_{Qц} \cdot \frac{\varpi_ц}{h} + b_{Qц} \cdot \frac{\varpi_ц^3}{h^3}. \tag{16}$$

Для гофрированных мембран без жесткого центра ($\rho_0=0$) уравнение (16) имеет следующий вид

$$\frac{QR^2}{\pi Eh^4} = a_Q \cdot \frac{\varpi_0}{h} + b_Q \cdot \frac{\varpi_0^3}{h^3}, \tag{17}$$

где $a_Q = \dfrac{k_{tp}(1+\beta)^2}{3k_{1r}\left(1 - \mu^2 \dfrac{k_{1r}k_{1t}}{k_{tp}k_{rp}}\right)}$; $\quad b_Q = \dfrac{k_{1r}}{k_{tp}(1-\beta^2)}\left[\dfrac{k_{tp} - \mu k_{1r}}{(\beta k_{tp} - \mu k_{1r})(1+\beta)} - \dfrac{1}{2}\right],$ (18)

ϖ_0 – относительный прогиб центра мембраны.

Проведенный анализ показывает, что жесткость на изгиб мембран с гофрами в окружном и радиальном направлениях по сравнению с жесткостью мембран с гофрами только в окружном направлении возрастает пропорционально отношению коэффициентов анизотропии $\dfrac{k_{tp}}{k_{1r}}$, а жесткость на растяжение уменьшается пропорционально тому же отношению, что позволяет значительно увеличить линейный участок упругой характеристики предлагаемой мембраны, снизить ее массу при действии в центре сосредоточенной силы *Q*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1962. – 456 с.

2. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.