УДК 624.074.4

РАСЧЕТ ГОФРИРОВАННОЙ ПО ДВУМ КООРДИНАТНЫМ ОСЯМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В.Ф. УВАКИН, В.Б. ОЛЬКОВА

Институт техники, технологии и управления

Балаково

При расчете упругой характеристики гофрированная в окружном и осевом направлениях цилиндрическая оболочка рассматривается как конструктивно-ортотропная оболочка. В работе получено уравнение упругой характеристики предлагаемой оболочки, приведен сравнительный анализ свойств оболочки без гофр и гофрированной цилиндрической оболочки, даны рекомендации по использованию нового типа оболочек.

Известные гофрированные по одной координатной оси оболочки нашли широкое применение в измерительной технике (мембраны, сильфоны) [1], в строительных конструкциях (перекрытия зданий и сооружений, ангары из гофрированных металлических оболочек) благодаря возможности резкого увеличения изгибной жесткости оболочки по одной координате.

Необходимость создания гофрированных оболочек нового типа – с гофрами по двум координатным осям, имеющих повышенную изгибную жесткость по двум координатам, в том числе и цилиндрических, обусловлена требованиями улучшения технических характеристик измерительных преобразователей (датчиков давления, ускорения, расхода, уровня и т.д.) – повышения чувствительности, быстродействия, уменьшения массогабаритных характеристик, расширения линейного участка упругой характеристики, снижения массы строительных конструкций (плит перекрытий, цилиндрических и сферических резервуаров и цистерн, куполов зданий и сооружений, дымовых труб), летательных аппаратов, создание металлокерамических камер сгорания для различных двигателей, плавильных и вращающихся печей [2], котлов, высокотемпературных химических реакторов, плавучих платформ, двухконтурных скоростных теплообменников с повышенной эффективностью на основе гофрированных оболочек с особыми свойствами.

Постановка задачи, принятые допущения. Гофрированную цилиндрическую оболочку можно рассматривать как конструктивно-ортотропную оболочку, что позволяет получить материал для расчета в наиболее простой аналитической форме.

Если вырезать из гофрированной по двум координатным осям тонкостенной цилиндрической оболочки элемент конечных размеров (рис.1) с волнами гофр в направлении образующей цилиндра (ось OX) длиной l_x, глубиной H_x по срединной поверхности гофрированной оболочки, средней длиной волны гофр S_x и с волнами гофр в окружном направлении (ось OY) длиной l_y, глубиной H_y по срединной поверхности гофрированной оболочки и средней длиной волны гофр S_y, то при изгибе и растяжении этого элемента в осевом и окружном направлениях его жесткости будут существенно меняться в зависимости от глубины гофр в осевом H_x и окружном H_y направлениях, поэтому расчетную схему гофрированной цилиндрической оболочки выберем в виде анизотропной цилиндрической оболочки той же толщины G.

Упругие коэффициенты анизотропного материала определим из равенства жесткостей на растяжение и на изгиб элемента анизотропной цилиндрической оболочки соответствующим жесткостям элемента гофрированной цилиндрической оболочки [1].

Задачу будем решать при симметричном нагружении тонкостенной гофрированной цилиндрической оболочки с учетом гипотезы о неизменности нормали к срединной поверхности гофрированной цилиндрической оболочки и предположении о ненадавливании слоев оболочки друг на друга.

Деформации и напряжения, возникающие в гофрированной оболочке, также обладают, очевидно, осевой симметрией и деформированный гофрированный цилиндр представляет собой некоторое тело вращения. Форма этого тела определяется формой изогнутой образующей к срединной поверхности гофрированного цилиндра.

Вывод дифференциального уравнения для прогиба образующей срединной поверхности гофрированной по двум координатным осям цилиндрической оболочки. Вывод дифференциального уравнения для анизотропной цилиндрической оболочки во многом совпадает с выводом уравнения для изотропной цилиндрической оболочки.

Одинаковы уравнения равновесия и геометрические уравнения для анизотропной и изотропной оболочек. Различие имеет место только в выражениях, связывающих относительные деформации с напряжениями.

При выводе дифференциального уравнения для прогиба образующей срединной поверхности гофрированной по двум координатным осям цилиндрической оболочки воспользуемся методикой, приведенной в работе [3].

Обозначим через ϖ радиальное перемещение, а через ϑ угол наклона касательной к образующей срединной поверхности эквивалентной анизотропной цилиндрической оболочки, при этом

$$\frac{d\varpi}{dx} = \vartheta . \qquad (1)$$

Относительное удлинение ε_x элементарного отрезка, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности цилиндрической оболочки с радиусом R равно

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + z\frac{d\vartheta}{dx}, \qquad (2)$$

где ε_0 – удлинение срединной поверхности;

$z\frac{d\vartheta}{dx}$ - удлинение, обусловленное искривлением образующей цилиндра.

Относительное удлинение в окружном направлении

$$\varepsilon_y = \frac{\varpi}{R} . \qquad (3)$$

Модули упругости анизотропного материала эквивалентной цилиндрической оболочки можно представить

$$E_{xp} = \frac{Ek_{1y}}{k_{xp}};\ E_{yp} = \frac{Ek_{1x}}{k_{yp}};\ E_{xu} = \frac{Ek_{yp}}{k_{1x}};\ E_{yu} = \frac{Ek_{xp}}{k_{1y}}, \qquad (4)$$

где k_{ij} – коэффициенты анизотропии.

Отметим, что коэффициенты k_{1x}, k_{1y} и $k_{xр}$, $k_{yр}$ зависят только от геометрии профиля гофрированной по двум координатным осям цилиндрической оболочки и ее толщины, причем коэффициенты k_{1x}, k_{1y} немного больше единицы и определяются отношением длины дуги волн гофр к длине волны гофр, коэффициенты $k_{xр}$, $k_{yр}$ определяются главным образом относительной глубиной гофр H_x/h и H_y/h , мало зависят от формы гофр, длины волн гофр и могут быть весьма значительными. Методика определения коэффициентов анизотропии приведена в работе [1].

Поскольку эквивалентная анизотропная цилиндрическая оболочка той же толщины обладает «двойной» анизотропией, то уравнения связи между напряжениями растяжения $\sigma_{xр}$, $\sigma_{yр}$ и изгиба $\sigma_{xи}$, $\sigma_{yи}$ в осевом и окружном направлениях и относительными деформациями ε_x, ε_y запишем отдельно для растяжения:

$$\varepsilon_{xp} = \frac{k_{xp}}{Ek_{1y}} \cdot \left(\sigma_{xp} - \frac{\mu \cdot k_{1y}}{k_{xp}} \sigma_{yp} \right); \qquad (5)$$
$$\varepsilon_{yp} = \frac{k_{yp}}{Ek_{1x}} \cdot \left(\sigma_{yp} - \frac{\mu \cdot k_{1x}}{k_{yp}} \sigma_{xp} \right)$$

и для изгиба:

$$\varepsilon_{xu} = \frac{k_{1x}}{Ek_{yp}} \cdot \left(\sigma_{xu} - \frac{\mu \cdot k_{1y}}{k_{xp}} \sigma_{yu} \right); \qquad (6)$$
$$\varepsilon_{yu} = \frac{k_{1y}}{Ek_{xp}} \cdot \left(\sigma_{yu} - \frac{\mu \cdot k_{1x}}{k_{yp}} \sigma_{xu} \right),$$

где μ - коэффициент Пуассона для изотропного материала.

Из уравнений (5) найдем выражения для определения напряжений растяжения $\sigma_{xр}$, $\sigma_{yр}$ в осевом и окружном направлениях анизотропной цилиндрической оболочки

$$\sigma_{xp} = \frac{E}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\frac{k_{yp}}{k_{1x}} \cdot \varepsilon_{xp} + \mu \varepsilon_{yp} \right); \qquad (7)$$

$$\sigma_{yp} = \frac{E}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\frac{k_{xp}}{k_{1y}} \cdot \varepsilon_{yp} + \mu \varepsilon_{xp} \right),$$

где β - безразмерный параметр, связанный с коэффициентами анизотропии следующим соотношением

$$\beta^2 = \frac{k_{xp} k_{yp}}{k_{1x} k_{1y}}. \qquad (8)$$

С учетом выражений для относительных деформаций ε_x (2) и ε_y (3) уравнения (7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xp} &= \frac{E}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\frac{k_{yp}}{k_{1x}} \cdot \varepsilon_0 + \mu \frac{\varpi}{R} + \frac{k_{yp}}{k_{1x}} z \frac{d\vartheta}{dx} \right); \\ \sigma_{yp} &= \frac{E}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\mu \varepsilon_0 + \frac{k_{xp}}{k_{1y}} \frac{\varpi}{R} + \mu \cdot z \frac{d\vartheta}{dx} \right). \end{aligned} \qquad (9)$$

В работе [3] показано, что для элементарного элемента цилиндрической оболочки с размерами $dx \cdot dy$ и высотой h нормальные силы T_x, T_y в площадках hdy и hdx, отнесенные к единице длины сечения, будут соответственно равны

$$T_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xp} dz, \; T_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yp} dz.$$

Причем осевая сила T_x определяется условиями нагружения цилиндра на торцах.

Подставляя значения напряжений σ_{xp}, σ_{yp} из уравнений (9), получим:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{Eh}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\frac{k_{yp}}{k_{1x}} \cdot \varepsilon_0 + \mu \frac{\varpi}{R} \right); \\ T_y &= \frac{Eh}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\frac{k_{xp}}{k_{1y}} \cdot \frac{\varpi}{R} + \mu \varepsilon_0 \right). \end{aligned} \qquad (10)$$

Из уравнений (6) определим изгибные напряжения в осевом и окружном напрявлениях:

$$\begin{aligned} \sigma_{xu} &= \frac{E\beta^2}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\frac{k_{yp}}{k_{1x}} \varepsilon_{xu} + \mu \varepsilon_{yu} \right); \\ \sigma_{yu} &= \frac{E\beta^2}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \left(\frac{k_{xp}}{k_{1y}} \varepsilon_{yu} + \mu \varepsilon_{xu} \right). \end{aligned} \qquad (11)$$

Учитывая, что составляющая отосительного удлинения ε_0 не вызывает изгибной деформации образующей цилиндрической оболочки, выражение для относительных удлинений ε_{xu} и ε_{yu} в формулах (11) примут следующий вид

$$\varepsilon_{xu} = z \cdot \frac{d\vartheta}{dx}; \qquad \varepsilon_{yu} = \frac{\varpi}{R}.$$

Изгибающие моменты, отнесенные к единице длины в площадках *hdy* и *hdx* для изгибных деформаций можно определить по следующим соотношениям:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xu} z dz = \frac{E\beta^2}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\mu \frac{\varpi}{R} + \frac{k_{yp}}{k_{1x}} z \frac{d\vartheta}{dx} \right) z dz;$$
$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yu} z dz = \frac{E\beta^2}{\beta^2 - \mu^2} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{k_{xp}}{k_{1y}} \frac{\varpi}{R} + \mu \cdot z \frac{d\vartheta}{dx} \right) z dz. \tag{12}$$

Откуда зависимости моментов M_x и M_y от перемещения ϖ примут следующий вид:

$$M_x = D_{го} \cdot \frac{d^2\varpi}{dx^2} = D \frac{(1-\mu^2)\beta^2}{(\beta^2 - \mu^2)} \cdot \frac{k_{yp}}{k_{1x}} \cdot \frac{d^2\varpi}{dx^2};$$
$$M_y = \frac{k_{1x}}{k_{yp}} \cdot \mu D_{го} \cdot \frac{d^2\varpi}{dx^2} = \mu D \frac{(1-\mu^2)\beta^2}{(\beta^2 - \mu^2)} \cdot \frac{d^2\varpi}{dx^2}, \tag{13}$$

где $D_{го} = \frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\beta^2}{(\beta^2 - \mu^2)} \cdot \frac{k_{yp}}{k_{1x}}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ - жесткости гофрированной и изотропной оболочек на изгиб соответственно.

Из листовых конструкционных материалов, предназначенных для вытяжки изделий, по условию технологичности можно изготовить оболочки малой толщины с относительной глубиной гофр $\frac{H}{h} = 50...150$ при коэффициентах анизотропии k_{1x}, k_{1y} равных 1,2…1,3 и k_{xp}, k_{yp} равных 3750…33000.

В этом случае изгибная жесткость гофрированной цилиндрической оболочки по сравнению с изотропной будет повышена в 3000…25000 раз, а эквивалентная по изгибной жесткости изотропная цилиндрическая оболочка должна иметь в 14…29 раз большую толщину, что приведет к уменьшению материалоемкости изделий в 11...22 раза.

Из уравнений (10) исключаем ε_0

$$T_y = \frac{k_{1x}}{k_{yp}}\left(\frac{Eh}{R}\varpi + \mu T_x\right). \tag{14}$$

Для цилиндрической изотропной оболочки в работе [3] было получено второе дифференциальное уравнение, связывающее изгибающий момент M_x с давлением p внутри оболочки и окружной силой T_y

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = p - \frac{T_y}{R}. \tag{15}$$

Подставляя значение силы T_y из соотношения (14) в уравнение (15), получим

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = p - \frac{k_{1x}}{k_{yp}}\left(\frac{Eh}{R^2}\varpi + \mu\frac{T_x}{R}\right). \tag{16}$$

Используя первое выражение (13) и, исключая изгибающий момент M_x, получим дифференциальное уравнение относительно одного неизвестного – перемещения ϖ

$$\frac{d^4\varpi}{dx^4} + 4k^4\varpi = \frac{p}{D_{го}} - \frac{k_{1x}}{k_{yp}}\cdot\frac{\mu T_x}{RD_{го}}\qquad, \tag{17}$$

где

$$4k^4 = \frac{k_{1x}}{k_{yp}}\cdot\frac{Eh}{R^2 D_{го}} = \frac{12\left(\beta^2 - \mu^2\right)}{R^2 h^2 \beta^2}\cdot\frac{k_{1x}^2}{k_{yp}^2}. \tag{18}$$

Решение уравнения (17) может быть записано в виде

$$\varpi = e^{-kx}\cdot(C_1\sin kx + C_2\cos kx) + e^{+kx}\cdot(C_3\sin kx + C_4\cos kx) + \varpi^*, \tag{19}$$

где ϖ^* - частное решение, которое находится в зависимости от закона изменения давления p вдоль образующей.

Для определения четырех постоянных необходимо задать четыре граничных условия и затем решить систему четырех уравнений. В большинстве случаев эта система оказывается, как говорят, слабо связанной и распадается на две системы из двух уравнений. С достаточной степенью точности постоянные C_1 и C_2 определяются независимо от постоянных C_3 и C_4. Объясняется это тем, что слагаемые, входящие в функцию ϖ (19), имеют различные характер. Первое слагаемое $e^{-kx}\cdot(C_1\sin kx+C_2\cos kx)$ представляет собой быстро затухающую функцию. Второе слагаемое $e^{+kx}\cdot(C_3\sin kx+C_4\cos kx)$ является функцией быстро возрастающей.

Если длина цилиндра l достаточно велика и функция $e^{-kx}\cdot(C_1\sin kx+C_2\cos kx)$ при значениях x, близких к l, принимает изчезающе малые значения, то можно считать, что деформация цилиндра в окрестности второго торца не зависит от условий в окрестности первого. Таким образом, для достаточно длинного цилиндра имеется возможность проанализировать напряженное состояние в области малого x, пренебрегая возрастающей функцией $e^{+kx}\cdot(C_3\sin kx+C_4\cos kx)$, т.е. полагая $C_3=C_4=0$. Точно также, полагая $C_1=C_2=0$ и сохраняя только возрастающее слагаемое можно проанализировать напряженное состояние цилиндра при значениях x, близких к l.

Проведенный анализ показывает, что гофрированные по двум координатным осям цилиндрические оболочки по сравнению с цилиндрическими оболочками без гофр позволяют:

- путем изменения параметров волн гофр в широких пределах изменять свойства цилиндрической оболочки по отношению к внешним возмущениям (давлению, осевой силе, изгибающим моментам, действующим в осевой плоскости);
- увеличить в $\frac{k_{yp}}{k_{1x}}$ прогиб ϖ гофрированной оболочки от действия давления p, что существенно для измерительных преобразователей, содержащих такие оболочки, т.к. во столько же раз увеличивается крутизна упругой характеристики преобразователей давления;
- увеличить цилиндрическую и изгибную жесткости, что позволяет резко уменьшить металлоемкость конструкций, содержащих такие оболочки;

- резко снизить температурные напряжения в конструкциях, содержащих такие гофрированные оболочки за счет малой жесткости оболочек на растяжение (в ледостойких легких буровых платформах, работающих на морских шельфах);
- в случае использования таких оболочек в качестве сильфонов с малой жесткостью на растяжение получить большую изгибную жесткость сильфонов;
- изгибная жесткость гофрированной оболочки при продольном изгибе возрастает в $\frac{k_{yp}}{k_{1x}}$ раз, что позволяет использовать такие оболочки в несущих конструкциях, работающих на изгиб, например, в легких плавучих платформах для запуска космических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих характеристик элементов машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.

2. Увакин В.Ф., Увакин А.В. Вращающаяся печь. Патент СССР №1702884, 1991.

3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1974. – 560с.

РЕФЕРАТ

УДК 624.074.4

Расчет гофрированной по двум координатным осям цилиндрической оболочки. В.Ф. Увакин, В.Б. Олькова.

Предложен новый тип оболочек – гофрированные по двум координатным осям цилиндрические оболочки. При выводе дифференциального уравнения для прогиба образующей срединной поверхности гофрированной цилиндрической оболочки от действия избыточного давления и осевой силы она рассматривается как конструктивно-ортотропная оболочка с «двойной» анизотропией свойств по растяжению и изгибу, модули упругости анизотропного материала которой можно определить через коэффициенты анизотропии по известным соотношениям, значения которых зависят только от геометрии волн гофр и толщины оболочки. Получены уравнения связи между напряжениями растяжения и изгиба в осевом и окружном направлениях и относительными деформациями в тех же направлениях, решение дифференциального уравнения четвертого порядкам в простейшей аналитической форме. На основе проведенного анализа полученного решения сделаны выводы о возможности целенаправленного изменения свойств предложенных гофрированных оболочек в широких пределах, что позволяет улучшить технические характеристики приборов (повысить чувствительность, быстродействие), увеличить изгибную жесткость оболочек в сотни и тысячи раз, уменьшить массу оболочек, работающих под нагрузкой в инженерных сооружениях и аппаратах в 5…10 раз.

Ил. 1, библиогр. 3.

CALCULATION OF THE CYLINDRICAL SHELL, CORRUGATED ON TWO COORDINATE AXIS

V.F. UVAKIN, V.B. OLKOVA